КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ РЕЖИМОВ

В. А. Морозов

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: vam5@yandex.ru

Проведено численное оценивание неизвестных параметров модели на основе смоделированного временного ряда.

Ключевые слова: логит-функция, метод максимального правдоподобия.

ВВЕДЕНИЕ

Нестационарные временные ряды являются основным объектом эконометрических исследований. В частности, большое количество статей посвящено моделям с переключениями режимов [2], [3]. Например, модели подобного рода используются в идентификации банковских кризисов, предсказания цен акций и объема торгов на фондовом рынке. Обычно эти модели строятся на основе уравнений регрессии, авторегрессии-скользящего среднего (ARMA) или используются ARCH/GARCH модели, в которых предполагается изменение некоторых значений параметра в дискретные моменты времени. Например, среднее μ временного ряда y_t может принимать J возможных значений $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J$. В таком случае удобно обозначить его через μ_{s_t}, где s_t – ненаблюдаемая дискретная случайная переменная, которая принимает значения $1, 2, \ldots, J$. Соответствующая функция плотности распределения y_t, зависящая от индикатора режима s_t, может быть записана как $f(y_t | s_t, Y_{t-1})$, где $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3}, \ldots\}$. Предполагая, что s_t – случайная переменная с условными вероятностями режима $p_{jt} \equiv P(s_t = j | Y_{t-1})$, для $j = 1, \ldots, J$, можем получить маргинальную плотность распределения $f(y_t | Y_{t-1})$ путем интегрирования ненаблюдаемой случайной переменной s_t из совместной плотности распределения $p_{jt} \cdot f(y_t | s_t = j, Y_{t-1})$. Получающаяся маргинальная плотность распределения $f(y_t | Y_{t-1})$ используется для построения функции правдоподобия для оценивания по методу максимального правдоподобия. Учитывая спецификации условных вероятностей p_{jt} индикатора режима s_t, можно предположить, что s_t следует цепи Маркова первого порядка: $P(s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \ldots, Y_{t-1}) = P(s_t = j | s_{t-1} = i)$ (которые также упоминаются как переходные вероятности). С этим предположением можно рекурсивно вычислить p_{jt}, для всех $j = 1, \ldots, J$, и $t = 1, \ldots, T$, где T – объем выборки.

Хотя с помощью Марковских моделей с переключением режима были получены полезные результаты во многих эмпирических исследованиях, особенно в финансах и макроэкономике, большинство приложений ограничены самым простым одномерным случаем с двумя режимами. Когда рассматривают больше двух режимов, обычно некоторое подмножество переходных вероятностей $P(s_t = j | s_{t-1} = i)$ полагается равной нулю, ибо зачастую невозможно иметь наблюдения для всех типов переключения режимов. Например, когда модель с тремя режимами применена к данным ВНП (валового национального продукта), основанным на предположении, что возможны периоды роста, падения и стагнации ВНП, выборка должна включать шесть типов переключения, чтобы оценить соответствующие переходные вероятности. Маловероятным кажется иметь много выборочных наблюдений относительно прямого переключения между периодами роста и падения, которые минуют период стагнации. В этом случае оценивание двух переходных вероятностей переключения между периодами роста и падения может оказаться невозможным. Другими словами, мы предварительно должны обнулить эти две переходные вероятности, перед тем как сможем оценить остальные. Также отметим, что во многих приложениях модели Маркова с переключением режима, определить, какие вероятности перехода должны быть нулевыми, не так просто, нежели в приведенном примере. Может потребоваться много циклов оценивания, прежде чем нулевые вероятности перехода будут определены. Кроме того, не ясно, как проверить гипотезы о том, что одна либо несколько переходных вероятностей нулевые.

МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ

В этой статье используется подход, предложенный в статье [1]. Кратко опишем упрощенную модель, которая исследовалась в данной статье. Рассматривается AR модель вида:

$$\phi(L)\left(y_t - \mu - \eta_{s_t}\right) = v_t, \tag{1}$$

где $\phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^{a} \phi_i L^i$ и v_t – белый шум с нулевым средним и дисперсией σ^2, η_{s_t} – параметр переключения среднего, s_t – индекс индикатора режима с J возможными состояниями. Правила нормировки имеет вид $\eta_1 = 0$.

Опишем динамику индикатора режима s_t, определяя вероятности режима как многомерные логит-функции:

$$P\left(s_t = j | Y_{t-1}\right) \equiv p_{jt} = \frac{\exp(z_{jt})}{\sum_{k=1}^{J} \exp(z_{kt})}, \quad j = 1, 2, \ldots, J, \tag{2}$$

$$z_{jt} = \begin{cases} 0, & для\ j = 1; \\ a_j + b_j \eta^*_{S_{t-1}}, & для\quad j = 2, \ldots J. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что со сменой режимов, которые полностью описываются переменными средним и дисперсией процесса y_t, весьма естественно определить динамику индикатора режима s_t через функцию регрессии прошлых значений от параметров переключения среднего η_{s_t}. Процесс s_t можно рассматривать как цепь Маркова 1-го порядка с переходными вероятностями, определяемыми (2) и (3).

Условие (3) включает неизвестный параметр $\eta_{s_{t-1}}$, зависящий от прошлых значений ненаблюдаемого процесса s_t, следовательно, соотношения (2) и (3) не вычисляемы.

Предположим сначала, что вероятности режимов p_{jt} заданы, тогда аппроксимация логарифмической функция правдоподобия имеет вид:

$$\sum_{t=1}^{T} \ln\left[\sum_{j=1}^{J} p_{jt} \cdot f_{jt}(v_{jt})\right], \tag{4}$$

где v_{jt} – инновация в (1), при условии, что $s_t = j$ и $f_{jt}(v_{jt})$ – условная функция плотности вероятности v_{jt}, $s_t = j$. В силу того, что распределение v_t – гауссовское

$$f_{jt}(v_{jt}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{v_{jt}^2}{\sigma^2}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, J. \tag{5}$$

Вектор неизвестных включает не только AR коэффициенты, но также и $J-1$ параметров переключения среднего $\eta_2, \ldots, \eta_J$, а также $(J-1)$ логит-коэффициентов a_j, b_{ji}.

Оценка логарифмической функции правдоподобия (4) требует, чтобы были вычислены v_{jt} по данным y_t, включающим ненаблюдаемые прошлые значения η_{s_t}. Для решения этой проблемы предлагается следующая аппроксимация v_{jt}:

$$v_{jt} \equiv y_t - \mu - \eta_j - \sum_{l=1}^{a} \phi_l \left(y_{t-l} - \mu - \overline{\eta}_{t-l}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, J, \tag{6}$$

где

$$\overline{\eta}_{t-l} \equiv \sum_{j=1}^{J} p_{j,t-l} \eta_j. \tag{7}$$

Аппроксимация $\eta_{S_{t-k}}$ представляется в виде:

$$\eta^*_{S_{t-k}} \equiv y_{t-k} - \mu - \sum_{l=1}^{a} \phi_l \left(y_{t-k-l} - \mu - \overline{\eta}_{t-k-l}\right) \equiv v_{j,\,t-k} + \eta_j \tag{8}$$

для $k = 1, 2, \ldots, t-1$.

Оценка (8) включает только прошлые значения y_t, что позволяет найти функцию правдоподобия (4).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В данной работе исследовалась возможность применения данного алгоритма оценивания для различных дисперсий помехи. Рассмотрим модель (1) с $\mu = 0$, $a = 1$, $J = 2$. Сложность алгоритма оценивания заключается в том, что функция правдоподобия задана алгоритмически и, следовательно, возможны лишь два способа нахождения неизвестных параметров, либо методом Монте-Карло, либо простым перебором на множестве заданных точек на некотором ограниченном множестве. В статье использован простой метод перебора.

Приведем пошаговый алгоритм оценивания

1. Пусть $\theta = (\phi_1, \eta_1, \eta_2, a, b)$, где $a = a_2, b = b_2$ и $\theta \in \Theta = \{\theta_i, i = \overline{1, K}\}$ – заданное множество параметров;
2. полагаем $t = 0, \overline{\eta}_0 = 0, v_{10} = 0, v_{20} = 0$;
3. $t = t + 1$;
4. вычисляем p_{jt}, v_{jt} по формулам (2), (3), (6) – (8);

5. если $t < T$ переходим к шагу 3, иначе к шагу 6;
6. вычисляем логарифмическую функцию правдоподобия по формулам (4), (5);
7. если $i < K$, то полагаем $i = i + 1$ и переходим к шагу (1), иначе к шагу (8);
8. в качестве оценки неизвестных параметров выбираем ту точку из Θ, для которой достигается максимум (4).

Результаты экспериментов отображены в таблице 1 ($\sigma^2 = 0{,}5$) и таблице 2 ($\sigma^2 = 2$), доверительные интервалы с уровнем значимости 0,05 и $T = 100$.

Таблица 1

Оценки неизвестных параметров ($\sigma^2 = 0{,}5$)

	Параметры	Оценки	Доверительный интервал
ϕ_1	-0.24	-0.22	(-0.221786, -0.218214)
η_1	0.50	0.47	(0.455271, 0.484729)
η_2	1.50	1.59	(1.573128, 1.606872)
a	0.32	0.29	(0.287482, 0.292518)
b	-0.10	-0.10	(-0.101604, -0.098557)

Таблица 2

Оценки неизвестных параметров ($\sigma^2 = 2$)

	Параметры	Оценки	Доверительный интервал
ϕ_1	-0.24	-0.25	(-0.255357, 0.244643)
η_1	0.50	0.61	(0.582034, 0.637966)
η_2	1.50	1.35	(1.315882, 1.384118)
a	0.32	0.34	(0.332447, 0.347553)
b	-0.10	-0.11	(-0.114813, 0.105187)

Результаты экспериментов свидетельствуют о возможности использования данного алгоритма для оценивания неизвестных параметров в моделях с логит-переключениями режимов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ching-Fan Chung* The Autoregressive Logit Regime Switching Model and Its Applications to Financial Data / Ching-Fan Chung, Kuang-Liang Chang, Chun-khui Hsieh // Nippon Tokei Gakkai Koen Hokokushu. 2002. V. 70. P. 184–187.

2. *Hamilton, J. D.* Regime Switching Models / J. D. Hamilton // Palgrave Dictionary of Economics, 2005.

3. *Hamilton, J. D.* A New approach to the economic analysis of nonstationary time Series and the business cycle / J. D. Hamilton // Econometrica. 1989. V. 57(2). P. 357–384.